Tentamen Talen en Automaten, 22 april 2009

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Als het tentamen is nagekeken, kun je het inzien bij Wim H. Hesselink, Bernoulliborg kamer 374.

Opgave 1 (8 %) Beschouw de grammatica $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ met $V = \{S\}$ en $\Sigma = \{a, b\}$ met de regels P:

$$S \quad \to \quad SS \mid ab \mid ba \mid \lambda \ .$$

a) Is deze grammatica regulier?
b) Is de taal voortgebracht door deze grammatica regulier?
Licht beide antwoorden toe aan de hand van de betreffende definities.

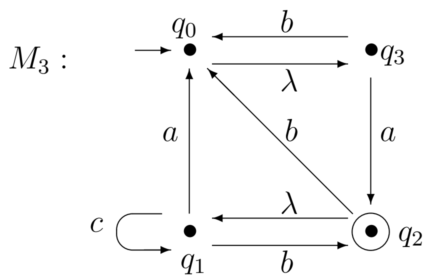
Opgave 2 (6 %) Is de taal $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n \leq 3m\}$ over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ context-vrij? Licht je antwoord toe.

Opgave 3 (12 %) Gegeven is de grammatica G volgens

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A \mid BC \\ A & \to & aA \mid C \\ B & \to & bAB \mid SbbC \\ C & \to & \lambda \mid cC \ . \end{array}$$

(a) Bepaal volgens het standaardalgoritme de verzameling van de nullables van G.
(b) Bepaal volgens het standaardalgoritme een gelijkwaardige *essentially noncontracting* grammatica met een *nonrecursive start symbol*.

Opgave 4 (12 %). Beschouw de NFA-λ M_3 hieronder over het alphabet $\{a, b, c\}$. Construeer hieruit op de standaardmanier een deterministische automaat die dezelfde taal accepteert. Het is voldoende de overgangstabel te geven en het aantal toestanden, de starttoestand en de accepterende toestanden.



ZOZ

Opgave 5 (16 %). (a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(b) De taal L_5 over het alfabet $\{a, b, c\}$ wordt gegeven door de grammatica

$$S \quad \rightarrow \quad \lambda \mid abSa \ .$$

Beschrijf de taal L_5 als verzameling.
(c) Bewijs dat de taal L_5 niet regulier is.

Opgave 6 (11 %). Construeer een stapelautomaat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ over het alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die de taal

$$L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid n_0(w) = 2 \cdot n_1(w)\}$$

accepteert. Hierbij is $n_a(w)$ het aantal a's dat in string w voorkomt. Het is voldoende het toestandsdiagram (de gelabelde graaf) te geven en duidelijk te maken waarom deze stapelautomaat de taal L_6 accepteert.

Opgave 7 (11 %). Construeer een éénbands Turingmachine met invoeralfabet $\{a, b\}$ die de taal $L_7 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ accepteert en die op elke invoer eindigt. Geef het toestandsdiagram (de gelabelde graaf) en maak duidelijk waarom deze Turingmachine aan de gestelde eisen voldoet.

Opgave 8 (12 %). (a) Geef de definitie van *recursieve* talen.
(b) Gegeven is een deterministische tweezijdige eenbandige Turingmachine M met de volgende eigenschap. Als M op een invoerstring w eindigt, dan eindigt M binnen $2^{(2^n)}$ stappen waarbij n de lengte van w is. Bewijs dat de door M geaccepteerde taal $L(M)$ recursief is.

Opgave 9 (12 %). (a) Geef de definitie van *recursief opsombare* talen.
(b) Gegeven zijn twee recursief opsombare talen L_a en L_b over een alfabet Σ. Bewijs dat de vereniging $L_a \cup L_b$ recursief opsombaar is. Gebruik hiertoe Turingmachines en beschrijf hoe en waarom deze werken, en hoe je daarmee het gestelde bewijst.